

## 座標値を未知量とした有限要素法による 張力構造の統一的解析技法に関する基礎的研究

合田 雄策

Architectural and Computational Engineering Laboratory

### 研究目的

#### ◇ 張力構造物の特殊性

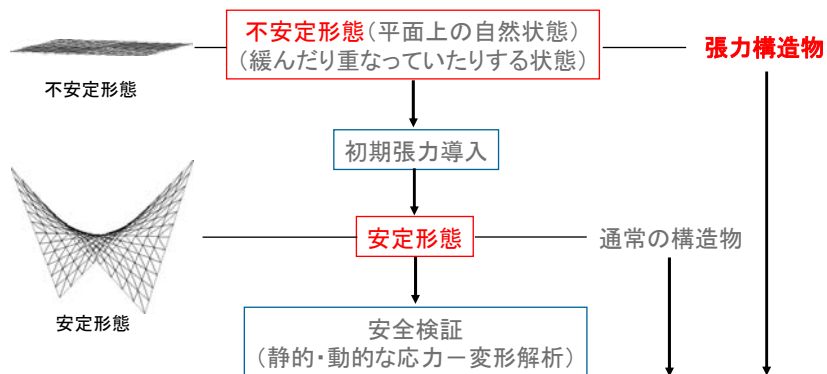
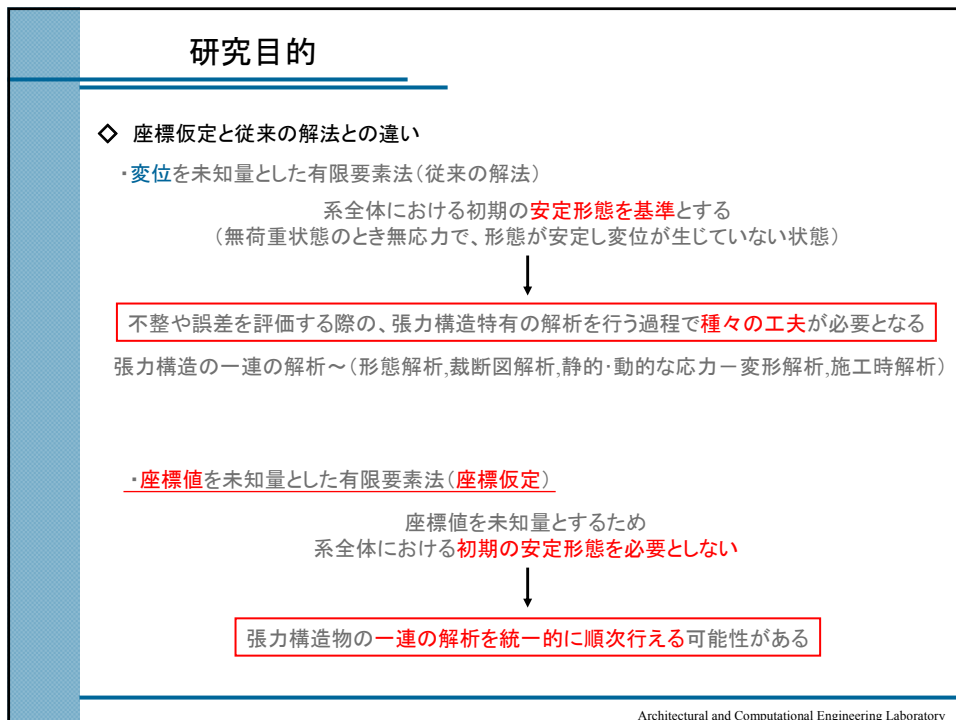
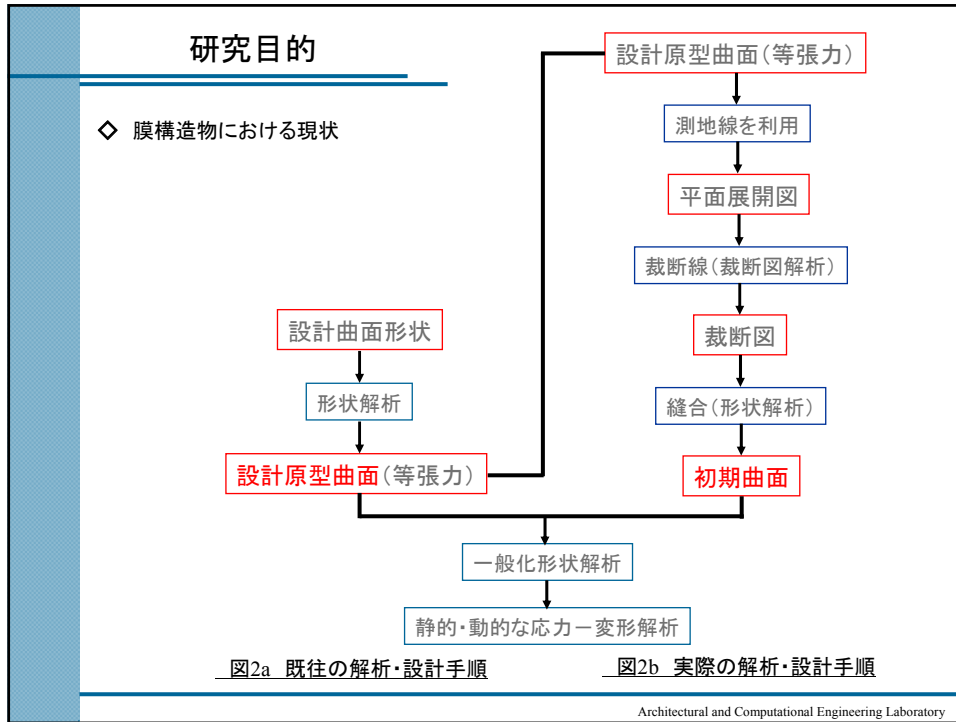


図1 張力構造物と通常の構造物との違い

Architectural and Computational Engineering Laboratory



## 座標仮定による定式化

・仮想仕事の原理より

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega - \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad - (1)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ : ひずみ,  $\mathbf{u}$ : 変位ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 応力,  $\mathbf{f}$ : 外力モードベクトル,  $\boldsymbol{\lambda}$ : 外力パラメータ,  $\Omega$ : 解析領域

・ひずみに変形前・後の第一基本計量の表現による次式を用いる

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}], \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_j}{\partial x_\beta} \delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad - (2)$$

$x_i (\equiv \mathbf{x}), X_i (\equiv \mathbf{X})$ : 変形前, 後の直交直線座標系の座標成分(位置ベクトル),  $\delta_{\alpha\beta}$ : Kronecker's Delta

・平衡方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}) d\Omega - \delta \mathbf{X}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad - (3)$$

## 離散化定式化

・ケーブル要素の仮定関数

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ Y &= \alpha_3 + \alpha_4 x \\ Z &= \alpha_5 + \alpha_6 x \end{aligned} \quad - (4)$$

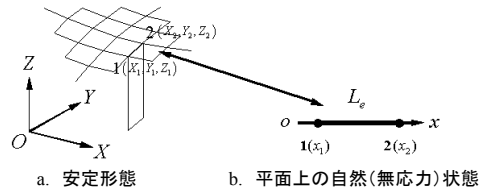


図3 ケーブル要素の全体座標系と局所座標系の関係

・膜要素の仮定関数

$$\begin{aligned} X &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ Y &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \\ Z &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y \end{aligned} \quad - (5)$$

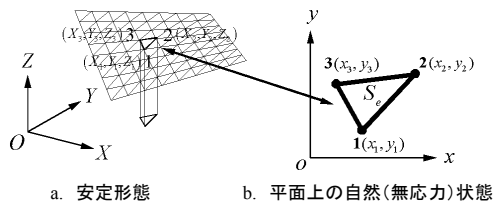


図4 膜要素の全体座標系と局所座標系の関係

## 離散化定式化

・ケーブル要素の離散化式

$$\frac{E_e A_e}{L_e} \begin{pmatrix} 6 \times 6 & 6 \times 1 \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2L_e} \begin{pmatrix} 6 \times 1 & 6 \times 6 & 6 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{G} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} + \mathbf{C}_e \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (6)$$

$\mathbf{X}_e = [X_1 \ X_2 \ Y_1 \ Y_2 \ Z_1 \ Z_2]^T$  : 安定形態における系全体の座標値  
 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_e = -\frac{1}{2}$ ,  $L_e$ : 部材長さ  
 $A_e$ : 断面積 : 要素の自然状態における局所情報

・膜要素の離散化式

$$\frac{1}{4S_e} \begin{pmatrix} (9 \times 9) \times 3 & 9 \times 1 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} \mathbf{D}_e \begin{bmatrix} \frac{1}{8S_e^2} \begin{pmatrix} 1 \times 9 & 3 \times (9 \times 9) & 9 \times 1 \\ \mathbf{X}_e^T & \mathbf{Q} & \mathbf{X}_e \end{pmatrix} + \mathbf{C}_e \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (7)$$

$\mathbf{X}_e = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Z_1 \ Z_2 \ Z_3]^T$  : 安定形態における系全体の座標値  
 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_e = \frac{1}{2}[-1 \ -1 \ 0]^T$   
 $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$   
 $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}$   
 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]$   
 $a_i = x_k - x_j$ ,  $b_j = y_j - y_k$  ( $i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2$ )  
 $S_e$ : 膜要素の面積 : 要素の自然状態における局所情報

Architectural and Computational Engineering Laboratory

## 張力構造の解析技法

◇ 裁断図解析

通常は、設計原型曲面と初期曲面との誤差を裁断図形状の変更により解決する。  
 本手法は、指定状態に近い裁断図形状と釣合形状の両者を同時に決定する方法を採用

・コンプライアンス(仕事量)最小化を考慮した裁断図解析

$$\begin{aligned} \text{目的関数:} & \quad \min C(\mathbf{x}_e^*) \\ \text{制約条件:} & \quad \sigma_L \leq \sigma_{xe} \leq \sigma_U \\ & \quad \sigma_L \leq \sigma_{ye} \leq \sigma_U \quad (e = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (8)$$

$C$ : 外力作用時の外力仕事(コンプライアンス)  
 $m$ : 最適化対象となる総膜要素数  
 $\mathbf{x}_e^*$ : 最適化対象となる膜材における自然状態の節点座標値(設計変数)  
 $\sigma_{ie}$ : 釣合形状における膜応力

↓

逐次2次計画法(SQP法)を用いた非線形計算の繰り返しにより  
**裁断図形状と釣合形状**を決定する

Architectural and Computational Engineering Laboratory

### 解析例

表1 材料定数

膜厚	$t = 0.8 \text{ mm}$
縦弾性係数 (x-方向 $E_x$ , y-方向 $E_y$ )	$E_x \cdot t = 213.8 \text{ N/mm}$
	$E_y \cdot t = 645.3 \text{ N/mm}$
ポアソン比	$\nu_{xy} = 0.3000$ $\nu_{yx} = 0.9055$
横弾性係数	$G_{xy} \cdot t = 55.9 \text{ N/mm}$
単位質量	$m = 1.215 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^2$

- : 内部既知節点
- : 境界未知節点
- : 裁断線上の未知節点

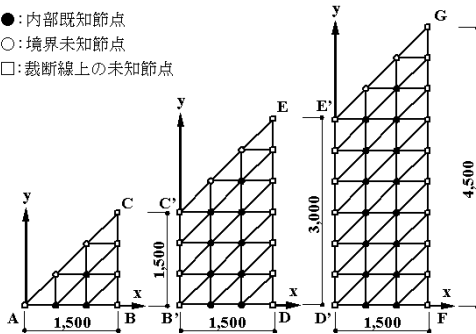


図5.a 初期裁断図形状及び要素分割図 (mm)

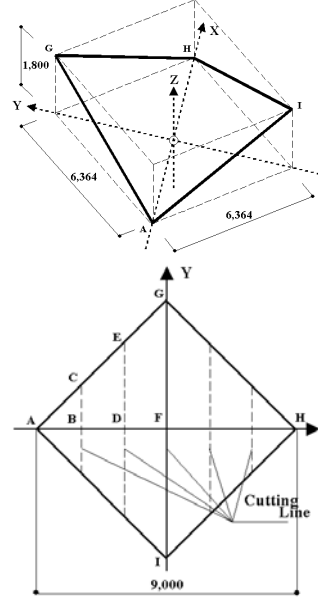


図5.b 縫合情報及びH.P.構造境界形状図

Architectural and Computational Engineering Laboratory

### 数値解析結果

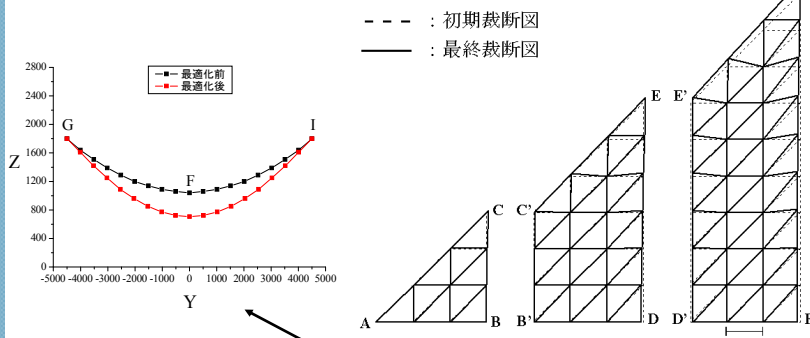


図6 最適化後の裁断図形状

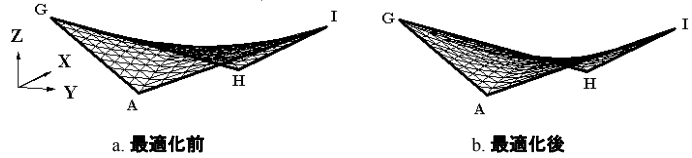
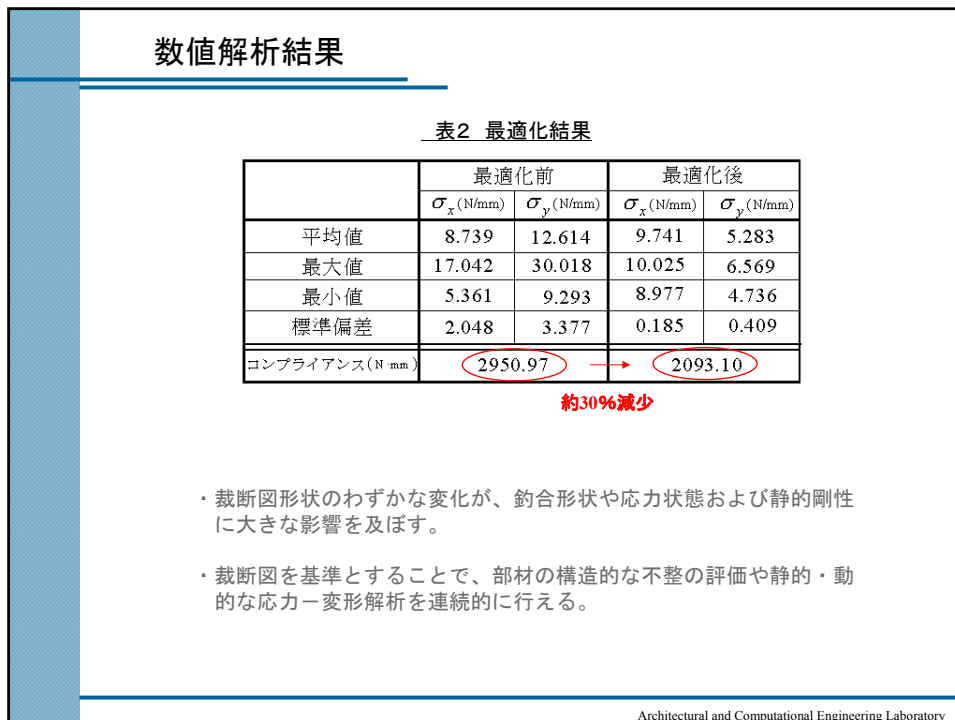
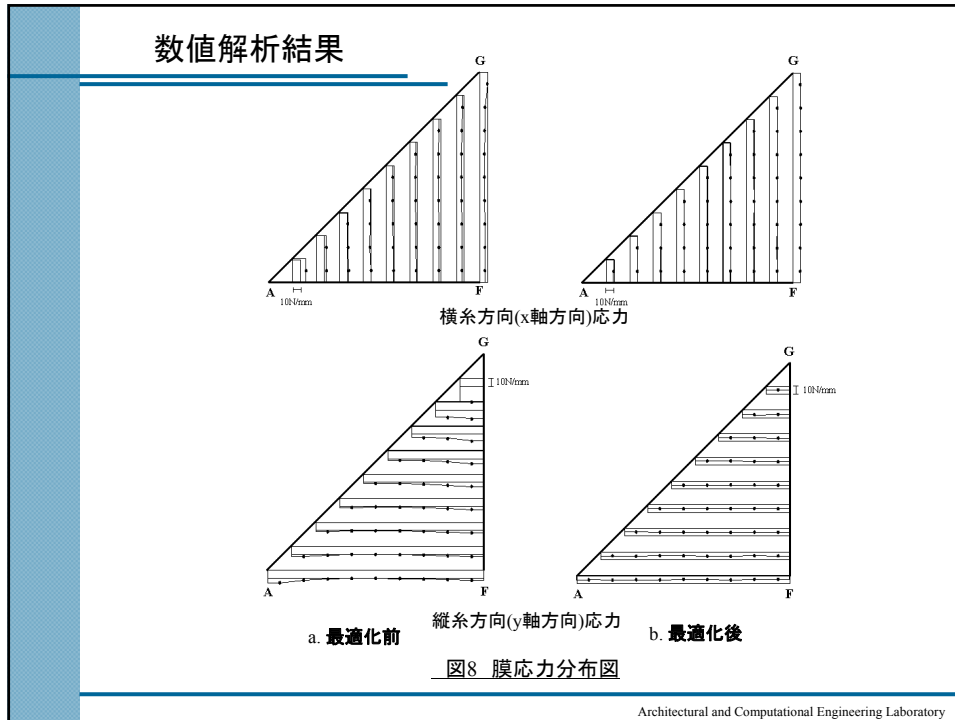


図7 最適化前後の釣合形状

Architectural and Computational Engineering Laboratory



## まとめ

- 張力構造解析において座標値を未知量とする有限要素法による手法が有効に機能することが示せた。
- 裁断図の座標値を基準とすることで、張力構造の一連の解析を統一的に順次行える。
- ケーブル材を含むサスペンション膜構造や内圧を与える空気膜構造においても解析可能であり、梁材の付加により仮設構造を含む張力構造全般に適用できる。