

弧長法による円弧アーチの非線形解析

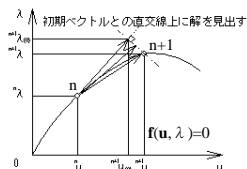
本間研究室 新屋直美

研究目的

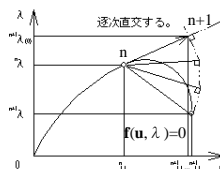
- 偏平アーチの解析を用いて代表的な**弧長法**を比較する。
- **円弧アーチ**の平衡曲線を求め、極限点と分岐点を把握し座屈後の釣合経路を追跡する。(座標系や仮定関数の異なる3種類の方法の比較)

n元連立非線形方程式の解法

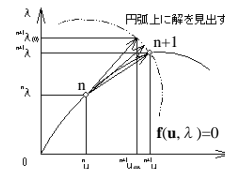
- Newton-Raphson法
- 荷重増分法
- 変位増分法
- **弧長法**
 - Riks/Wempner法
 - Crisfield法



Riks/Wempner法
(逐次直交しない)

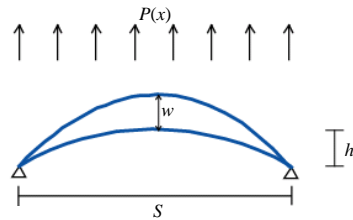


Riks/Wempner法
(逐次直交する)



Crisfield法

偏平アーチ解析

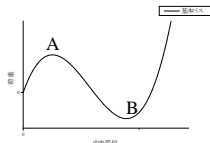


P : 荷重
 h : ライズ
 S : スパン
 w : 中央面のy方向の変位

偏平アーチモデル

Galerkin法を適用した離散化式を用いる。

モードは4次モードまで考慮する。



荷重-変位曲線

α : 偏平係数
 r : 弧長幅

ステップ数の比較 (極限点までのステップ数)

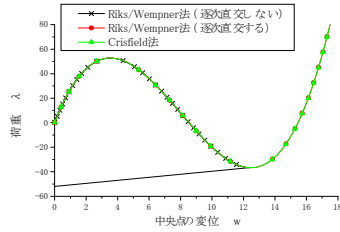
α	r	Riks/Wempner法 (逐次直交しない)		Riks/Wempner法 (逐次直交する)		Crisfield法	
		A点	B点	A点	B点	A点	B点
6	0.1	239	596	239	596	239	596
7	0.1	365	954	365	954	365	954
8	0.1	531	1433	531	1433	531	1433
9	0.1	744	2051	744	2051	744	2052
10	0.1	1009	2825	1009	2825	1009	2826
8	0.1	1061	2866	1061	2866	1061	2866
8	0.2	354	956	354	956	354	956
8	2	266	717	266	717	266	717

(step)

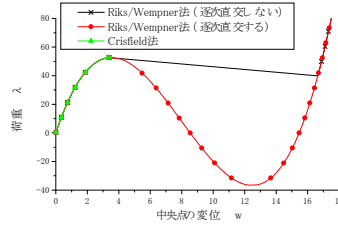
計算時間比較 (5000step)

α	r	Riks/Wempner法 (逐次直交しない)	Riks/Wempner法 (逐次直交する)	Crisfield法
6	0.1		0.2	0.22
7	0.1		0.21	0.24
8	0.1		0.2	0.22
9	0.1		0.2	0.23
10	0.1		0.21	0.23
8	0.1		0.22	0.22
8	0.2		0.21	0.22
8	0.2		0.22	0.23
合計			1.67	1.81
平均			0.20875	0.22625

時間(s)



荷重-変位曲線 ($\alpha=8$, 弧長幅 $r=0.25$)



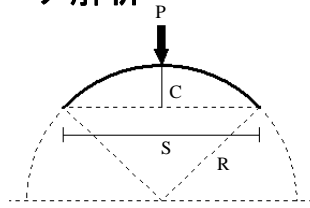
荷重-変位曲線 ($\alpha=8$, 弧長幅 $r=0.35$)

基本パスを追跡できる最大弧長幅

α	Riks/Wempner法 (逐次直交しない)	Riks/Wempner法 (逐次直交する)	Crisfield法
6	0.3	0.5	0.45
8	0.2	0.5	0.3
10	0.15	0.5	0.2

円弧アーチの解析→Riks/Wempner法 (逐次直交する)

円弧アーチ解析



- P : 荷重
- R : 曲率半径
- S : スパン
- C : 中心点のライズ

円弧アーチモデル

$$f(u, \lambda) = K(u)u - \lambda P$$

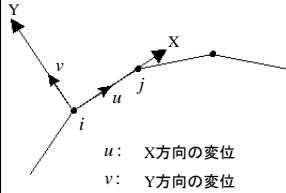
ただし、 $K(u)u = \frac{\partial U}{\partial u}$, $U = \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{1}{2} E b \varepsilon^2 dZ dS$

b: 断面の幅, E: ヤング係数, ε : ひずみ,
Z: 部材断面における中立軸からの距離

ひずみはGreenのひずみを用いる。

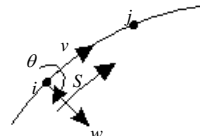
$$\varepsilon = \frac{dv}{dS} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dS} + \frac{v}{R} \right)^2 - S \left(\frac{d^2 w}{dS^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dS} \right) \quad (\text{曲線座標系})$$

直交座標系



u: X方向の変位
v: Y方向の変位

曲線座標系



v: 接線方向の変位
w: 法線方向の変位
theta: 回転角

1. X方向の変位を一次関数、Y方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数(剛体変位除去)

$$u = a_1 x + a_2$$

$$v = a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6$$

2. 接線方向の変位を一次関数、法線方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数

$$v = b_1 + b_2 S$$

$$w = b_3 + b_4 S + b_5 S^2 + b_6 S^3$$

$$\theta = \frac{b_1}{R} + \frac{b_2}{R} S + b_4 + 2b_5 S + 3b_6 S^2$$

3. 線形の軸ひずみを定数、線形の曲げひずみを一次関数で仮定して求めた変位仮定関数

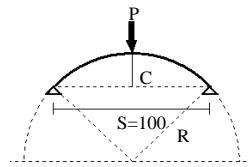
線形の軸ひずみ $\epsilon = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R} = c_4$

線形の曲げひずみ $\kappa = \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds} = c_5 + c_6 s$

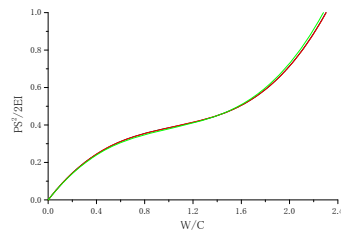
$$v = -c_1 \cos\left(\frac{S}{R}\right) + c_2 \sin\left(\frac{S}{R}\right) + c_3 + c_4 RS + \frac{1}{2} c_6 RS^2$$

$$w = c_1 \sin\left(\frac{S}{R}\right) + c_2 \cos\left(\frac{S}{R}\right) - c_4 R + c_5 R^2 + c_6 R^2 S$$

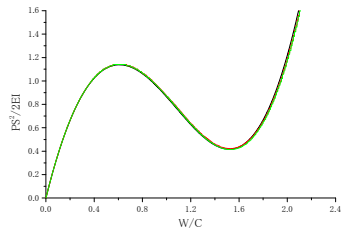
$$\theta = \frac{c_1}{R} + c_4 S + \left(R^2 + \frac{1}{2} S^2\right) c_6$$



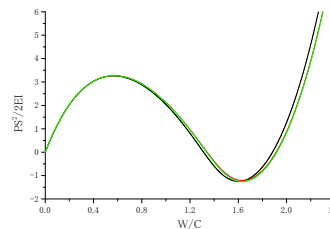
- 1. X方向の変位を一次関数、Y方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数(直交座標系)
- 2. 接線方向の変位を一次関数、法線方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数(曲線座標系)
- 3. 線形の軸ひずみを定数、線形の曲げひずみを一次関数で仮定して求めた変位仮定関数(曲線座標系)



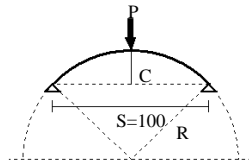
基本パス (半径R=800, 分割数n=50)



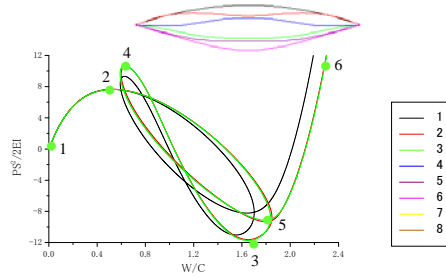
基本パス (半径R=400, 分割数n=50)



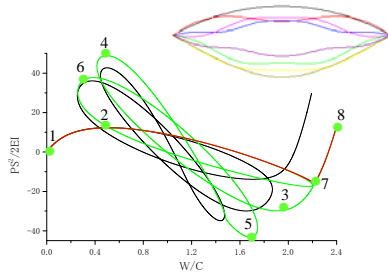
基本パス (半径R=250, 分割数n=50)



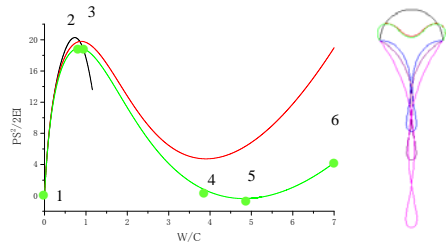
- 1. X方向の変位を一次関数、Y方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数 (直交座標系)
- 2. 接線方向の変位を一次関数、法線方向の変位を三次関数で仮定して求めた変位仮定関数 (曲線座標系)
- 3. 線形の軸ひずみを定数、線形の曲げひずみを一次関数で仮定して求めた変位仮定関数 (曲線座標系)



基本パス (半径R=150, 分割数n=50)



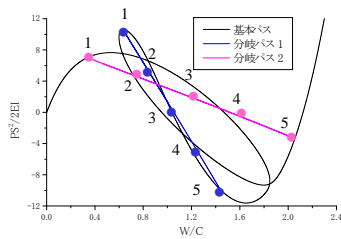
基本パス (半径R=100, 分割数n=100)



基本パス (半径R=50, 分割数n=100)

分岐解析

- 3. 線形の軸ひずみを定数、線形の曲げひずみを一次関数で仮定して求めた変位仮定関数



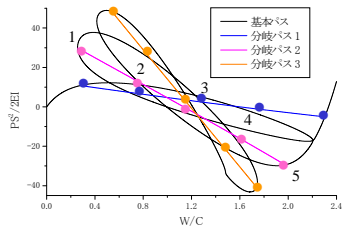
分岐パス (半径R=150, 分割数n=50)



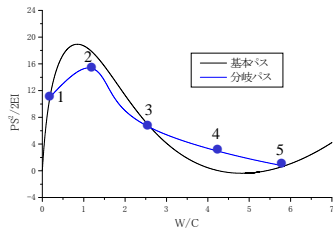
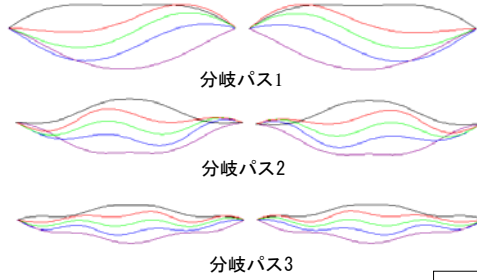
分岐パス1



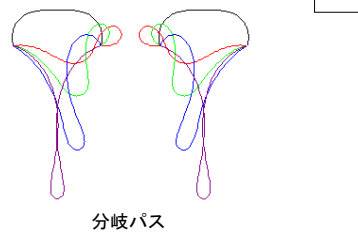
分岐パス2



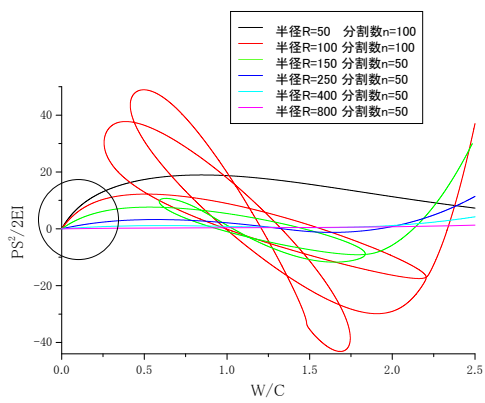
分岐パス (半径R=100, 分割数n=100)



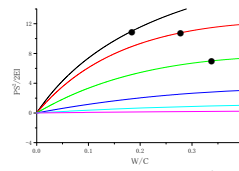
分岐パス (半径R=50, 分割数n=100)



分岐パス



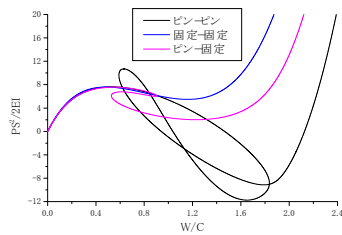
基本パス



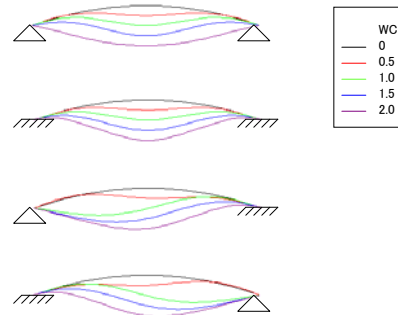
1つ目の分岐点

境界条件比較

3. 線形の軸ひずみを定数、
線形の曲げひずみを一次
関数で仮定して求めた変
位仮定関数



基本パス (半径R=150, 分割数n=50)



まとめ

— 弧長法の比較 —

- 最も効率のよい弧長法は逐次直交するRiks/Wempner法である。

— 円弧アーチの基本パス —

- 半径が大きい場合は3種類の変位仮定関数による基本パスはほぼ一致する。
- 半径が小さい場合は3種類の変位仮定関数による基本パスは途中から一致しない。
- 直交座標系による変位仮定関数は半径50のとき途中で解が求められない。
- 曲線座標系による変位仮定関数は線形ひずみを代数関数で仮定した方が精度がよい。

— 円弧アーチの分岐パス —

- 半径50まででは境界条件が両端ピンのときのみ分岐パスは解析できる。
- 分岐パスは半径が小さいとき曲線になる。